

Ergänzungen zur Differentialrechnung:

Umkehrbarkeit, Auflösbarkeit ($\rightarrow$ § 21)

(Analogie zur Linearen Algebra)

Umkehrsatz:

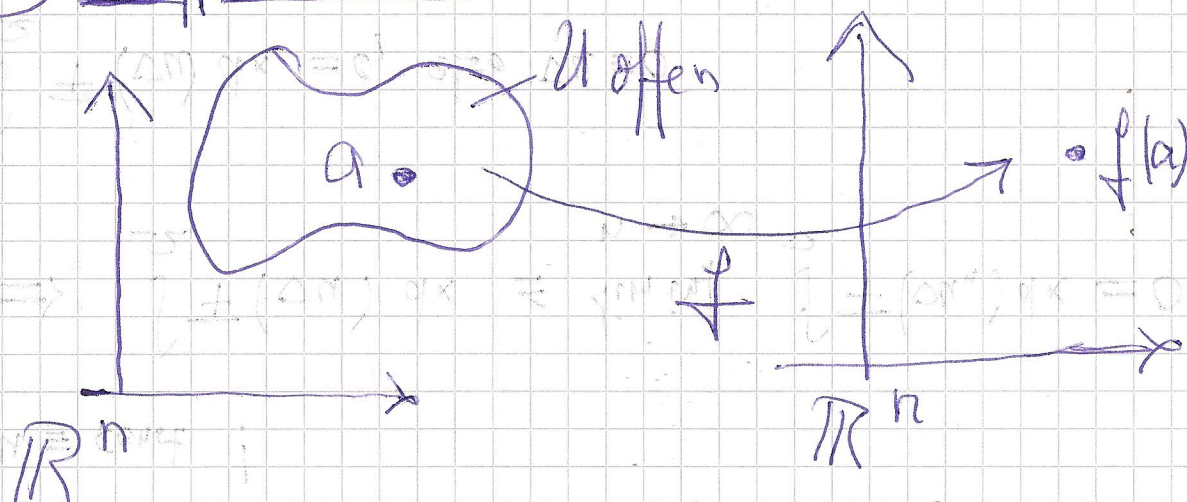
1.) lineare Situation

Sei $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Aus

$$\boxed{\det L \neq 0}$$

folgt dann die Invertierbarkeit von L .

2.) differenzierbarer Fall



Sei $f: \mathbb{R}^n \supset U$ (offen) $\rightarrow \mathbb{R}^n$
stetig diff'bar, also

$$\frac{\partial f^j}{\partial x_i} \text{ stetig auf } U, i, j = 1, \dots, n.$$

An der Stelle $a \in U$ gelte

$$\text{! } \det Jf(a) = \det \left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}(a) \right) \neq 0. \text{!}$$

Dann bildet f die Menge U bijektiv

auf eine offene Menge V mit $f(a) \in V$

ab und

$$g := (f|_U)^{-1}: V \rightarrow U$$

ist auf V differenzierbar mit

$$Dg(y) = Df(x)^{-1}, \quad x := g(y)$$

(„lokale Invertierbarkeit“)

Beispiel : $f(x, y) = e^x (\cos y, \sin y)^T \in \mathbb{C}$

klar : f stetig diff'bar auf $\mathbb{R}^2$;

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det Jf(x, y) = e^{2x} > 0$$

Also kann man f überall lokal invertieren, global natürlich nicht, denn z.B.

$$f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$$



$$ax + by = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

beschreibt eine Gerade

setze $f(x, y) = ax + by$

1.) $b = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{a}{b}x}$$

man kann nach
 y auflösen

2.) $a = \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow \dots$

nichtlineare f ?

$\rightarrow$ "Kurve"

// Kurven u. Flächen

d

1.) Situation in $\mathbb{R}^2$:

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

beschreibt die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
mit Abstand 1 zu $(0, 0)$, also eine
Kurve in $\mathbb{R}^2$. (Kreislinie)

Idee: Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben,

so ist auch die Menge

$$M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0 \}$$

eine ebene Kurve.

Dazu sei ab jetzt f stetig diff'bar

und $M \neq \emptyset$.

Präzise: Sei $(x_0, y_0) \in M$ (also $M \neq \emptyset$)^c

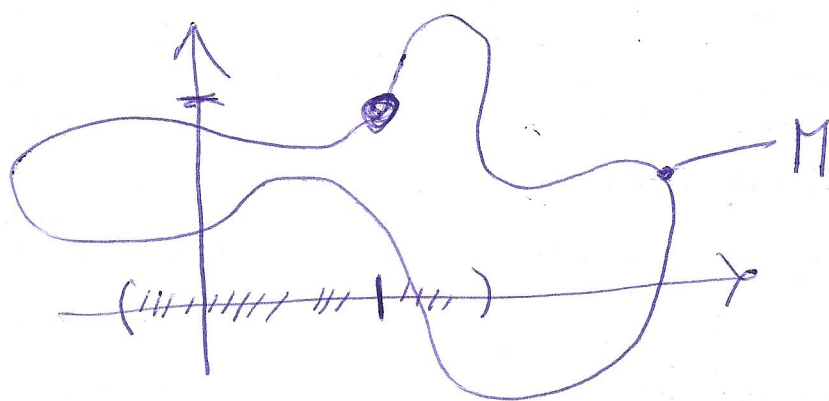
a) Falls $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ gilt,

so folgt

$$\left\| M \cap \text{Umgebung von } (x_0, y_0) = \right. \\ \left. \{ (t, \gamma(t)) : t_0 \in \text{Intervall um } x_0 \} \right.$$

mit einer C^1 -Funktion $\gamma: t \mapsto \gamma(t)$.

D.h.: M ist lokal ^{bei (x_0, y_0)} eine Graphenkurve.



Die Gleichung
 $f(x, y) = 0$
kann nach
 y aufgelöst
werden.

b) Falls $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$

$$= \{ (\gamma(t), t) : \dots \} \dots$$

2.) Situation in $\mathbb{R}^3$:

†

~~Annahme~~ $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

beschreibt die Kugeloberfläche; sei

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad M := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$
 $(\text{stetig} \uparrow \text{diff'bar}) \quad f(x, y, z) = 0 \}$

Annahme : $(x_0, y_0, z_0) \in M$

a) Falls $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, so hat

M lokal bei (x_0, y_0, z_0) die Form

$$\left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \text{Umg. von } (x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R}^2 \right\},$$

ist also Graphenfläche.

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

.....